BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Egyenletrendszerek

Kf87 2017-09-15

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Egyenletrendszerek megoldása

Egyenletrendszerek megoldása

Lineáris alakzatok egyenletei

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Egyenletrendszerek megoldása

Két geometriai modell

Lineáris egyenlet

D Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 ... x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek nevezzük, ahol a_1, a_2,... és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, a_2,... és a_n konstansokat az egyenlet együtthatóinak, b-t az egyenlet konstans tagjának nevezzük.

P Lineárisak-e az x, y, illetve az x, y és z változókban?

- $xz - y = 0$, $x + 2y = 3^z$,
- $x \sin z + y \cos z + y = z^2$, $0 = 2$,
- $x = y$, $x = 3 - y + 2z$, $x - y + 0z = 0$, $x + y - 2z = 3$
- $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$, $x + y + 2z = 0$?

Lineáris egyenletrendszer

D Lineáris egyenletrendszeren ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ & a_{12}x_2 + \ldots + \ & a_{1n}x_n = \ & b_1 \\ \vdots \quad & \ \vdots & \vdots \quad & \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots + & a_{mn}x_n = & b_m, \end{aligned} \tag{*}$$

ahol x_1, x_2,...x_n az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, egyébként inhomogén.

- Lineáris az x és y változókban:

$$\begin{aligned} ax + \quad y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= \ \ 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - \ \ y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad x + y = 1$$

Lineáris egyenletrendszer megoldása

D Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es (vagy vektor) megoldása (megoldásvektora) a (*) ersz-nek, ha megoldása minden egyenletnek (minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$,..., $x_n = u_n$ helyettesítés). Az összes megoldás halmaza a megoldáshalmaz. Egy ersz konzisztens (vagy megoldható), ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az ersz inkonzisztens (nem megoldható).

m Túlhatározott, ha az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenekénél, és alulhatározott, ha kisebb.

P Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

T **Ekvivalens átalakítások**

Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)

Mátrixok

- Fejléc nélküli táblázat: mátrix (elemei azonos algebrai struktúrából valók).
- Általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát
- Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $\mathbf{a}_j$ vagy az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

Egyenletrendszer együtthatómátrixa és (bővített) mátrixa

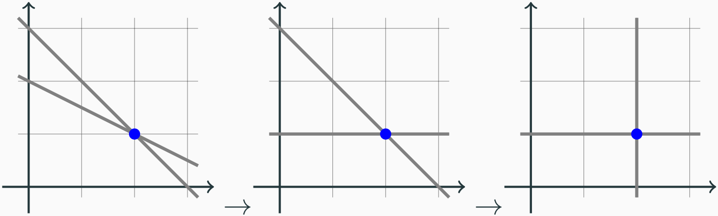
D egyenletrendszer együtthatómátrixa az egyenletek együtthatóit, míg mátrixa (bővített mátrixa) az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

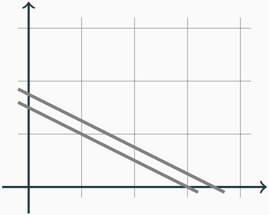
P Egy egyenletrendszer és megoldása:

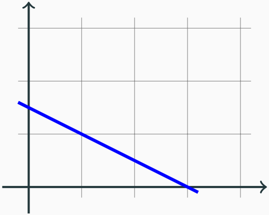
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$



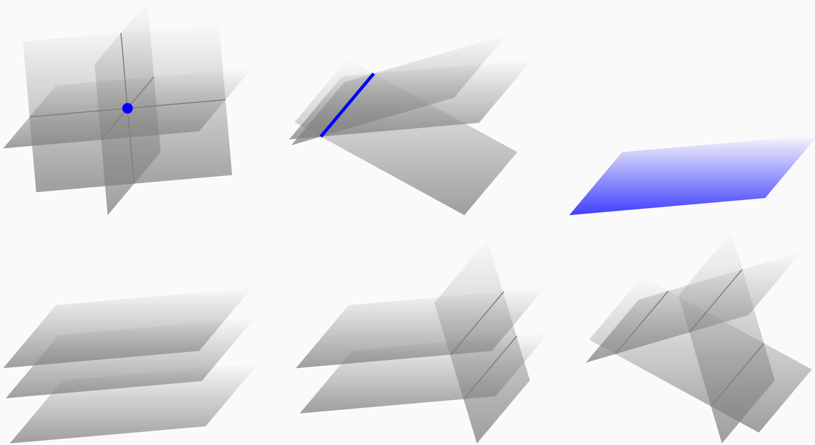
P Két másik egyenlet:

$$x + 2y = 3 \qquad x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 7 \qquad 2x + 4y = 6$$





Sormodell 3 ismeretlennel: síkok metszete



Á **Sormodell: hipersíkok metszete**

Ha egy $\mathbb{F}$ fölötti n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer m olyan egyenletből áll, melyek egyikének bal oldalán sem 0 minden együttható, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{F}^n$-ben.

- Az i-edik egyenlet:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

- Skalárszorzat alakban:

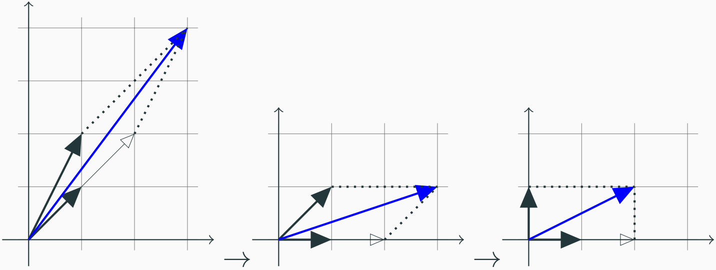
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i.$$

- Homogén esetben: $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, azaz a megoldásvektor merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

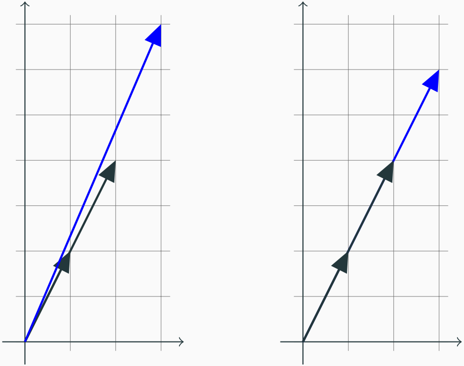
$$
\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}
$$



Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Két másik egyenlet:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



Oszlopmodell: vektorok lineáris kombinációja

Á **Oszlopmodell**

A (*) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

Egyenletrendszerek megoldása

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:
    - Sorcsere: két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
    - Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel)
    - Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

D

Lépcsős alak

Egy mátrix (sor)lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

Gauss-módszer

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

Gauss-módszer – egy megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 0 \\
2x + 2y + 3z &= 2 \\
x + 3y + 3z &= 4 \\
x + 2y + z &= 5
\end{aligned}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]
\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]
\xrightarrow{S_4-\frac{1}{2}S_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right]
\xrightarrow{S_4-\frac{3}{2}S_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\longrightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 0 \\
2y + z &= 4 \\
- z &= 2
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 3 \\
z &= -2
\end{aligned}
\quad \rightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2)
$$

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3-2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

- Kötött változók: x_1 és x_3, szabad változók: x_2, x_4, x_5, értékük tetszőleges: pl. $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$.

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Írjuk fel oszlopok lineáris kombinációjaként!

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 1 \\ 2x + 4y + 5z + 6w &= 3 \\ x + 2y + z \phantom{{}+ 4w} &= 3 \end{aligned}$$

Gauss-módszer – homogén lineáris egyenletrendszer

- Oldjuk meg az előző ersz-hez tartozó homogén ersz-t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

T **Lépcsős alakra hozás**

Bármely valós (vagy bármely test feletti) mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B Az algoritmus:

1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk az 1. pontra.

Redukált lépcsős alak (rref)

D **Redukált lépcsős alak**

Egy mátrix redukált lépcsős alakú, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. minden főelem oszlopában a főelemen kívüli elemek 0-k;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Redukált lépcsős alakra hozás

m Algoritmus: oszloponként haladva először *a vezérelemek alatt*, majd utána az *utolsó oszloptól kezdve fölöttük* eliminálunk!

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

M1 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

M2 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gauss–Jordan-módszer

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = & \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \qquad = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$,

- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége

T **A redukált lépcsős alak egyértelmű**

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

B Indirekt: $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége 2.

$$\hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián, ezért az $\hat{R}$ és $\hat{S}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
- $\rightsquigarrow$ vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát $\hat{R} = \hat{S}$, ellentmondás.

m **rref**(A) az a függvény, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjából a zérussorok elhagyásával kapott mátrixot rendeli.

Szimultán egyenletrendszerek

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 3 \\ 2u + 3v + 2w &= 7 \\ 2u + 2v + 3w &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r + s + t &= 0 \\ 2r + 3s + 2t &= 0 \\ 2r + 2s + 3t &= 1 \end{aligned}$$

- $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-2S_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{S_1-S_2 \\ S_1-S_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

- Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$