

BME



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20



Vektorok – az n -dimenziós tér

Kf87 2017-09-08



Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Vektorok

Vektorok

Az \mathbb{R}^n vektortér

E lecke befejezése után a hallgató

- el tudja végezni az \mathbb{R}^n tér vektorműveleteit beleértve vektorok szögének és távolságának meghatározását,
- fel tudja írni azt az egyenletrendszert, melynek segítségével eldönthető, hogy egy vektorrendszer lineárisan független-e,
- fel tudja írni azt az egyenletrendszert, melynek segítségével egy adott vektor kifejezhető egy adott vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként,

D Halmaz hatványa

Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem- n -esek halmazát H^n -nel jelöljük.

- $H = \{0,1\}$ elemeiből képzett rendezett elemhármakok:
$$H^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$
- Sík pontjai és vektorai \mathbb{R}^2 , téré \mathbb{R}^3
- Halmaz hatványa \neq hatványhalmaz (halmaz összes részhalmazának halmaza)

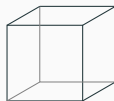
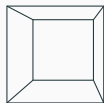
- 4-dimenziós kocka

1D: _____

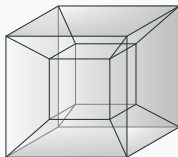
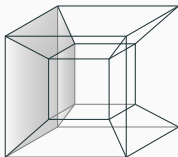
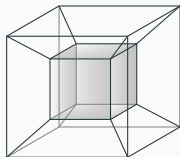
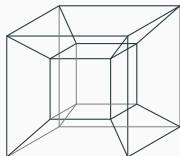
2D:



3D:



4D:



D Vektorműveletek definíciói

Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az \mathbb{R}^n két tetszőleges vektora. Két vektor összegén és egy vektor c -szeresén az

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).$$

\mathbb{R}^n -beli vektorokat értjük.

Az \mathbb{R}^n vektortér alaptulajdonságai

T Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai

! $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, $c, d \in \mathbb{R}$, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \dots, 0)$ vektort. Ekkor

A1	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	fölcserélhető (kommutatív)
A2	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	csoportosítható (asszociatív)
A3	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
M1	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
M2	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	szorzás 0-val
M3	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel
D1	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
D2	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív

B Mindegyik visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira. Pl: $A1$ bizonyítása:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}.\end{aligned}$$

m \mathbf{u} ellentettjén a $-\mathbf{u}$ -val jelölt vektort értjük, melyet \mathbf{u} -hoz adva a nullvektort kapjuk: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow$

$$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \rightsquigarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

- A skalár hátra is írható: $c\mathbf{u} = \mathbf{u}c$, $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$
- $A1-A3$ az összeadás (addíció), $M1-M3$ a szorzás (multiplikáció), $D1-D2$ a két művelet közös disztributív tulajdonságait írják le.
- A vektortér általános fogalma erre épül, mivel sok matematikai objektum rendelkezik e tulajdonságokkal. Például a folytonos valós függvények, a differenciálható valós függvények, a polinomok, a legfölbbebb 3-adfokú polinomok,...

Vektorok lineáris függetlensége

D Lineáris kombináció

Vektorok **lineáris kombinációján** skalárszorosaik összegét értjük. Konkrétan: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ egy lineáris kombinációja a $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor, ahol $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

D Vektorok lineáris függetlensége

Azt mondjuk, hogy egy \mathbf{v} vektor **lineárisan független** a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ ($k \geq 1$) vektoroktól, ha \mathbf{v} nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ ($k \geq 2$) vektorok **lineárisan függetlenek** ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

D Vektorok lineáris összefüggősége

Egy vektorrendszer **lineárisan összefüggő**, ha nem független. (≥ 2 vektorból álló vektorrendszer lineárisan öf., ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként [**lineárisan függ** a többitől], az egy vektorból álló vektorrendszer lin. öf., ha a zérusvektorból áll.)

D Generátorrendszer

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **generátorrendszert** alkotnak, ha a vektortér minden vektora előáll ezek lineáris kombinációjaként.

D Bázis

Egy vektortér független vektorokból álló generátorrendszerét **bázisnak** nevezzük.

A standard bázis

D Standard bázis

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt az \mathbb{R}^n vektortér **standard bázisának** nevezzük.

T A standard bázis bázis

Az \mathbb{R}^n -beli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok bázist alkotnak.

B **Függetlenek:** \mathbf{e}_1 nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz azok első koordinátája 0, így bármely lineáris kombinációjukban is 0 az első koordináta, \mathbf{e}_1 -ben pedig 1. Hasonlóan a többire.

- **Generátorrendszer:** egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektorra

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n,$$

tehát minden vektor előáll az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ lin. komb.-jaként.

T Lineáris függetlenség

Tetszőleges \mathbb{R}^n -beli $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. \mathcal{A} lineárisan független.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő \mathcal{A} lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, c_2, \dots, c_k skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

- B** Tfh a vektorrendszer csak egyetlen \mathbf{a} vektorból áll.
- Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló ✓
 - Tfh a vektorrendszer legalább két vektorból áll.
Kontrapozícióval bizonyítunk: $A \Rightarrow B$ (ha A , akkor B) állítást a vele ekvivalens $\neg B \Rightarrow \neg A$ (ha nem B , akkor nem A) állítással.
 - (\Leftarrow) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = \dots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik \mathbf{a}_i sem fejezhető ki a többi lin kombjaként ($i = 1, \dots, k$).
 - Tfh valamelyik – pl. a \mathbf{a}_1 – kifejezhető a többi lin kombjaként:

$$\mathbf{a}_1 = d_2\mathbf{a}_2 + \dots + d_k\mathbf{a}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \dots + d_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

a $\mathbf{0}$ -t előállítottuk nemtrivi lin kombként.

- (\Rightarrow) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor.
- Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor \mathbf{a}_1 kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1} \mathbf{a}_k,$$

ami bizonyítja az állítást.

D Skaláris szorzás \mathbb{R}^n -ben

Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az \mathbb{R}^n tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

P Legyen $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ és $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$. Számítsuk ki $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ és $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ értékét!

M $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2) = 5$.

- $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 14 \cdot 14} = \sqrt{225} = 15$.

A skaláris szorzás alaptulajdonságai

T A skaláris szorzás alaptulajdonságai

Legyen \mathbf{u} , \mathbf{v} és \mathbf{w} az \mathbb{R}^n három tetszőleges vektora, és legyen c egy tetszőleges valós. Ekkor

- S1 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ kommutatív
- S2 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ disztributív
- S3 $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ kompatibilis a két szorzás
- S4 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ pozitív definit

B A valósok tulajdonságaiból könnyen adódnak, pl. S1-et:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

m E négy tulajdonság vezet majd az euklideszi tér fogalmához.

Távolság és szög \mathbb{R}^n -ben

D Vektor hossza, abszolút értéke, normája

Az \mathbf{u} vektor **hosszán** (abszolút értékén vagy **euklideszi normáján**) önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, melyet $|\mathbf{u}|$ -val, illetve $\|\mathbf{u}\|$ -val jelölünk:

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1)$$

D Vektorok távolsága

A két **vektor távolságán** a különbségük abszolút értékét értjük:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad (2)$$

D Egységvektor

Az egységnyi hosszúságú vektort **egységvektornak** nevezzük.

D Vektorok szöge

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok (hajlás)szögének koszinusza az alábbi tört:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \quad (3)$$

D Vektorok merőlegessége

Amh két vektor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

m A fenti definíciók koordinátás alakja

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2},$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}}.$$

P Vektorok szöge és távolsága

Legyen $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ és $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$. Számítsuk ki (a) az \mathbf{u} abszolút értékét, (b) az \mathbf{u} irányú egységvektort, (c) az \mathbf{u} és \mathbf{v} távolságát, (d) az \mathbf{u} és \mathbf{w} szögét.

$$\mathbf{M} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$$

- egységvektor: $\frac{1}{15}(2, 3, 4, 14)$.
- A két vektor távolsága 15, ugyanis

$$\begin{aligned}d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 6)^2 + (4 - (-10))^2 + (14 - 10)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15.\end{aligned}$$

- A szög $\arccos \frac{1}{21}$, ugyanis

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{5}{15 \cdot 7} = \frac{1}{21}.\end{aligned}$$

Merőleges összetevő

T Vektorral párhuzamos és merőleges összetevő

Ha $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor \mathbf{b} felbomlik egy \mathbf{e} -vel párhuzamos és egy rá merőleges vektor összegére: $\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} + (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})$.

B $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \parallel \mathbf{e} \rightsquigarrow$ elég megmutatni: $((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \perp (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})$

$$((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = 0.$$

m \mathbf{b} -nek \mathbf{e} egyenesére eső merőleges vetülete $\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$

m Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor: a \mathbf{b} vektor \mathbf{a} egyenesére eső merőleges vetülete $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$, ugyanis

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} && \text{mivel } |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \end{aligned}$$

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

T Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ (azaz lineárisan összefüggők).

m ez bizonyítja, hogy értelmezhető vektorok szöge.

P Igazoljuk, hogy tetszőleges a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) valósokra

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

M Vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból. Így a CBS-egyenlőtlenséget kapjuk.

P Mennyi az $f(x, y, z) = x + 4y + 8z$ függvény maximuma az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltétel mellett?

M Az $x + 4y + 8z$ kifejezést tekintsük két vektor skaláris szorzatának és alkalmazzuk a CBS-egyenlőtlenséget!

- $x + 4y + 8z = (1, 4, 8) \cdot (x, y, z)$, így

$$(x + 4y + 8z)^2 \leq (1^2 + 4^2 + 8^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 81 \cdot 1 = 81.$$

Ebből $x + 4y + 8z \leq \sqrt{81} = 9$.

- Hol veszi fel a függvény a maximumát?

- Ahol a CBS-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, vagyis az egységgömb $(1, 4, 8)$ vektorral párhuzamos és egyirányú helyvektorú pontjában, tehát az $\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ helyen (a $-\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ helyen minimuma van).