BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Vektorok – a 2- és 3-dimenziós tér

Kf87 2017-09-05

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Vektorok

Vektorok

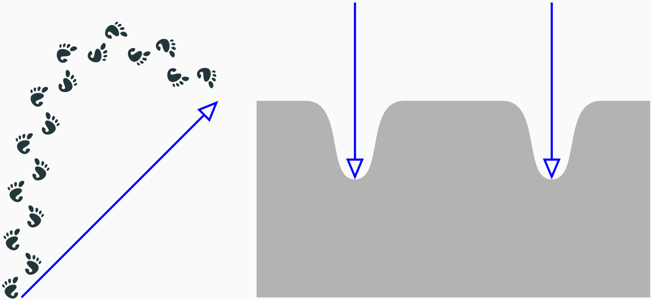
A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

Célkitűzések

E lecke befejezése után a hallgató

- különbséget tud tenni irányított szakasz és vektor között,
- ki tudja számolni vektorok vektori szorzatát, és alkalmazni tudja elemi geometriai feladatokban,
- meg tudja határozni 2 síkbeli vagy 3 térbeli vektor orientációját,
- ki tudja számolni paralelepipedon (előjeles) térfogatát, paralelogramma (előjeles) területét,
- fel tudja írni egy egyenes vagy sík explicit és implicit egyenlet(rendszer)ét megadott adatokból vagy a másik alakjából.

Irányított szakasz – kötött vektor

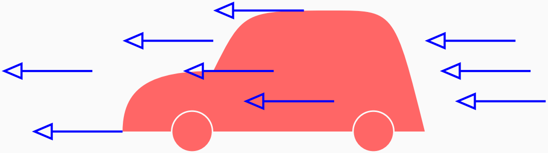


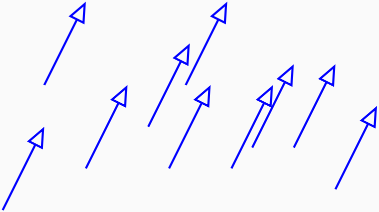
(a) (b)

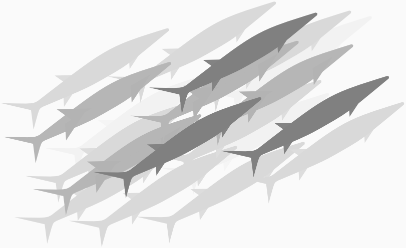
(a) elmozdulásvektor,

(b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora.

Vektor – szabad vektor







- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.
- Ekvivalencia reláció: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. A vektorok az ekvivalenciaosztályok.

Irányított szakasz – vektor

D **Irányított szakasz**

Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjait megkülönböztetjük: egyiküket kezdő-, másikukat végpontnak nevezzük.

Az A kezdőpontú, B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

D **Vektor**

Vektoron a párhuzamosan egymásba tolható irányított szakaszok egy osztályát értjük. Tehát egy irányított szakasz csak reprezentál egy vektort, de ugyanazt a vektort reprezentálja bármely párhuzamos eltoltja is.

Jelölések: $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\underline{a}$, $\overset{\rightharpoonup}{a}$.

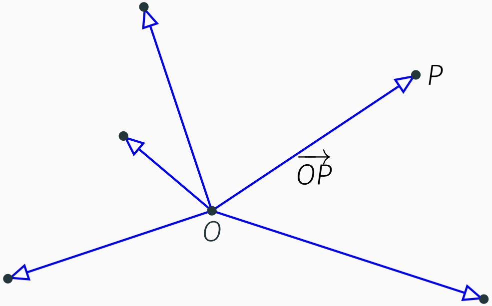
Vektor

- A fizikában használt kötött vektor és szabad vektor fogalmak megfelelnek a fenti irányított szakasz és vektor fogalmaknak:

Fizika	Matematika
kötött vektor	irányított szakasz
szabad vektor	vektor

Origó

- A közös kezdőpont



- A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.
- Míg egy irányított szakasz megadásához két pont rendezett párjának megadása szükséges, addig egy vektor megadásához elegendő egyetlen pont megadása, ha van origó.

A vektor jellemzői

D **Vektor hossza, abszolút értéke, euklideszi normája**

Vektor hosszán egy reprezentánsa két végpontjának távolságát értjük. A 0 hosszúságú vektort zérusvektornak nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor hosszát $|\mathbf{a}|$, illetve $\|\mathbf{a}\|$ jelöli.

D **Vektor állása**

Két nemzérus vektor kollineáris|párhuzamos|azonos állású, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Jelölés: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Nemzérus vektorok állásán az azonos állású vektorok osztályát értjük. A zérusvektor állása tetszőleges.

A vektor jellemzői

D

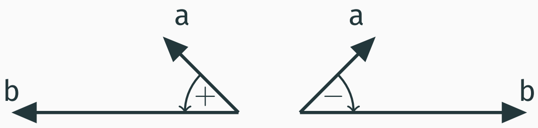
Vektor iránya

Két nemzérus kollineáris vektor azonos irányú, ha a kezdőpontjukból induló és a végpontjukat tartalmazó félegyenesek párhuzamosan egymásba tolhatók. Nemzérus vektorok irányán az azonos irányú vektorok osztályát értjük. $\mathbf{0}$ iránya tetszőleges.

Vektorok szöge

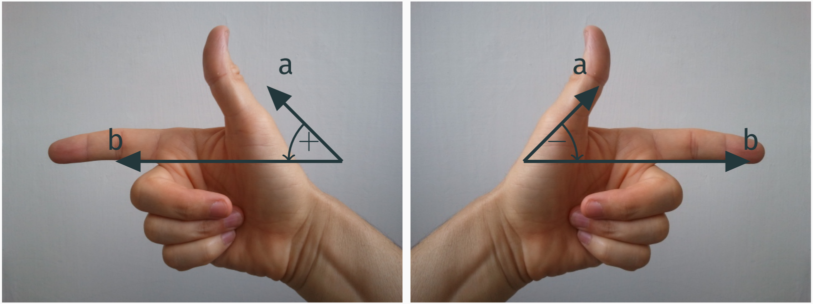
D **Szög, irányított szög**

Két nem párhuzamos síkbeli **a** és **b** vektor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$-vel jelölt szöge megegyezik a közös pontból induló, velük párhuzamos két félegyenes szögével, mely egy $[0,\pi]$ intervallumba eső szám. Ha **a** és **b** sorrendjét is megadjuk, két eset lehetséges: ha az **a**-val párhuzamos félegyenes a **b**-vel párhuzamos félegyenesbe az óramutató járásával ellentétes forgatással vihető át, akkor a két vektor szögét pozitív, ellenkező esetben negatív előjellel látjuk el. E szöget a két vektor irányított szögének nevezzük és $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle$-vel jelöljük.



D **Jobbrendszer, balrendszer**

Két nem párhuzamos síkbeli **a** és **b** vektor *jobbrendszert* alkot, ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle > 0$, és *balrendszert*, ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle < 0$.



Míg $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = (\mathbf{b},\mathbf{a})_\angle$, addig $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle = -(\mathbf{b},\mathbf{a})_\sphericalangle$, és ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a},-\mathbf{b})_\sphericalangle = -\pi/2$.

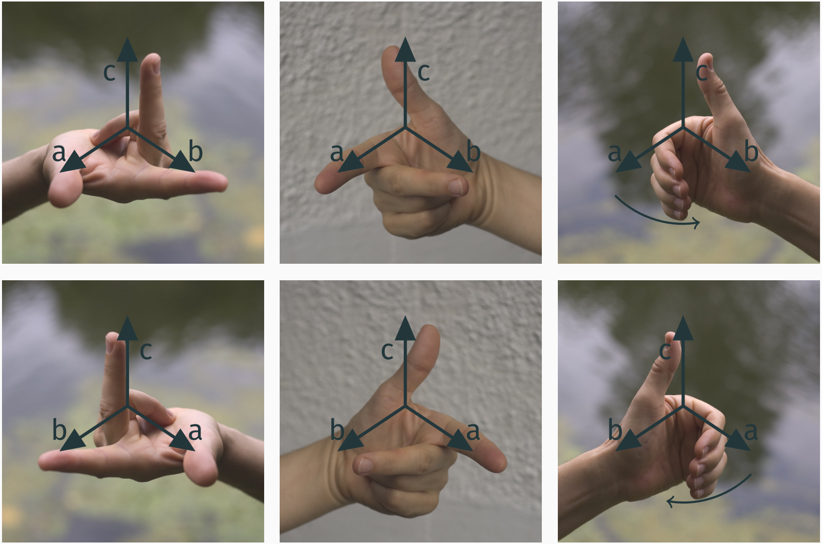
Bal, jobb?

- Vektorok szögének előjele, illetve vektorok orientációja valójában nem definiálható, csak annyi, hogy két vektorpár előjele azonos vagy különböző, és ha az egyiket pozitívnak (jobbrendszernek) nevezzük akkor a másik negatív (balrendszer) lesz. Az óramutató járására hivatkozás egy külső nézőpontot definiál, ha a síkra a másik oldaláról nézünk, minden az ellenkezőjére változik.

D **Jobbrendszer, balrendszer 3D-ben**

Három nem egy síkba eső $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor jobbrendszert alkot, ha $\mathbf{c}$ iránya felől nézve $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\sphericalangle > 0$, és balrendszert, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\sphericalangle < 0$.

Orientáció a térben



Vektorok

Vektori szorzás

A vektori szorzás fogalma

D

Vektori szorzat

A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

1. abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
2. állása merőleges mindkét vektorra,
3. ha a szorzat nem a nullvektor, akkor iránya olyan, hogy az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

A vektori szorzás fogalma

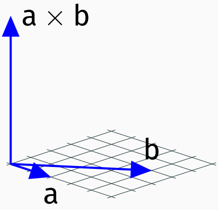
- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egy vektor, melyre
  - $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$,
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá
  - $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$.
- A vektor abszolút értékére a fenti képlet valóban nem negatív számot ad, mert a szinusz függvény a $[0, \pi]$ intervallumon nem negatív.
- E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem dönthető el, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor.

P **Példa**

Tegyük fel, hogy a tér két vektora 2 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$. Mit tudunk a vektori szorzatról?

M Számítsuk ki a vektorok hajlásszögének szinuszát!

- Ha $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, akkor $\sin\gamma = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$. Mennyi a vektorok szorzatának hossza?
- A vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 2\cdot 5\cdot\frac{3}{5} = 6$.
- A szorzat merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Így a következőképp ábrázolható:



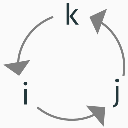
P **i, j, k vektori szorzatai**

Legyen **i**, **j**, **k** három, egymásra páronként merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk műveletttáblát vektori szorzataikról!

M Mik e vektorok önmagukkal vett szorzatai?

- Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.
- Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i},\mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = 1$. $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ merőleges **i**-re és **j**-re, és **i**, **j** valamint $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint **i**, **j** és $\mathbf{k} \rightsquigarrow \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



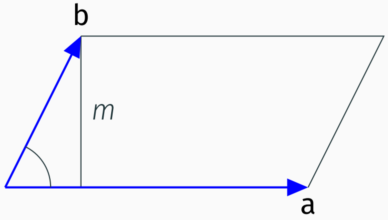
Vektori szorzat tulajdonságai

T **Mikor 0 a vektori szorzat?**

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

T **Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése**

Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.



Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

T

Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
   $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)
3. $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$
4. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle} \\
&= \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}
\end{aligned}
$$

Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

- A tétel első pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív*!
- A vektori szorzás nem is asszociatív. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektori szorzatai című példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Vektori szorzat kiszámítása koordinátás alakból

T **Vektori szorzat kiszámítása**

A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

B Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$,..., a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_2 b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1 b_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2 b \\
&= a_2 b_3 \mathbf{i} - a_3 b_2 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_1 b_3 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_2 b_1 \mathbf{k} \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).
\end{aligned}$$

Két séma a kiszámításra

- Első séma:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

- Második séma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

P **Példa**

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$ és a $\mathbf{b} = (3, 4, 5)$ vektorok vektori szorzatát!

M Bármelyik fenti sablon használható:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} i & j & k & i & j \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

$$(0, 1, 2) \times (3, 4, 5) = (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 5, 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = (-3, 6, -3)$$

T **Paralelepipedon térfogata**

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés értéke pozitív, ha a vektorok jobbrendszert, negatív, ha balrendszert alkotnak, és nulla, ha egy síkba esnek.

B Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a paralelepipedon magassága $\mathbf{c}$-nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő.

\- Kell az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektor:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$.

Előjeles térfogat

- Így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\left|\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\cdot\mathbf{c}\right| = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|\,.$$
- Tehát a paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$. A $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ skalár pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Végül $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$, azaz ha a három vektor egy síkba esik.

D **Paralelepipedon előjeles térfogata**

A $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelelpipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.

T **Paralelepipedon térfogatának kiszámítása**

L! $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) \\ &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\end{aligned}$$

m A korábban használt sablon átültethető:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

P

Paralelepipedon térfogata

Számítsuk ki a $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$ és $(2, 2, 1)$ vektorok alkotta paralelepipedon előjeles térfogatát és térfogatát!

M A sablonba helyettesítjük a számokat:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

- Kifejtve: $4 + 4 + 4 - 8 - 8 - 1 = -5$, tehát az előjeles térfogat -5. A három vektor tehát balrendszert alkot, és az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata 5.

Paralelogramma területe

T **Paralelogramma területe**

Az (a_1, a_2) és (b_1, b_2) vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|a_1b_2 - a_2b_1|$. Ha $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ a két vektor jobb-, ha < 0 balrendszert alkot.

- Ötlet: $(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0) = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & 0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_1 & b_2 \end{array}$$

- A terület $|(0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)| = |a_1b_2 - a_2b_1|$
- Ha a $(0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$ és $\mathbf{k}$ egyirányúak, azaz $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, akkor jobb-, ha < 0 balrendszert alkotnak.

m Sablon:

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array}$$

Paralelogramma előjeles területe

D **Paralelogramma előjeles területe**

Két síkbeli vektor által kifeszített paralelogramma *előjeles területe* megegyezik területével, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1-szeresével, ha balrendszert.

P **Példa**

Mekkora az $\mathbf{a} = (-19, 20)$ és $\mathbf{b} = (20, -21)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe és jobb vagy balrendszert alkotnak e vektorok?

M Az előjeles terület $(-19) \cdot (-21) - 20 \cdot 20 = -1$, balrendszer:

$$\begin{array}{cc} -19 & 20 \\ 20 & -21 \end{array}$$

Vektorok

Egyenes és sík egyenletei

Geometriai alakzat implicit egyenlet(rendszer)e

D

Alakzat implicit egyenletrendszere

Egy (geometriai) alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó *(implicit) egyenlet(rendszer)én* olyan, a koordinátákra felírt egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik az alakzathoz tartozó pontok koordinátái, de más pontokéhoz tartozók nem.

Az egyenletrendszer pontokba mutató vektorokra felírt alakját *(implicit) vektoregyenlet(rendszer)nek* nevezzük.

- P Az origó középű egységsugarú kör implicit egyenlete $x^2 + y^2 = 1$, míg implicit vektoregyenlete $|\mathbf{r}| = 1$.
- P Tekintsük a térben a a $z = 1$ síkban fekvő, egységsugarú kört, amelynek középpontja a z-tengelyre esik!
- \- Ennek implicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 1, \end{aligned}$$

- \- Implicit vektoregyenlet-rendszere

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| &= \sqrt{2}, && \text{minden pont } \sqrt{2} \text{ távolságra van az origótól} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} &= 1, && \text{ez a } z = 1 \text{ egyenlet vektoros alakja.} \end{aligned}$$

D **Alakzat explicit egyenletrendszere**

Egy alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó *explicit vagy paraméteres egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek.

Az alakzat *explicit vektoregyenletén* olyan egyenletet értünk, melynek bal oldalán az alakzat pontjaiba mutató $\mathbf{r}$ vektor, jobb oldalán paraméterektől függő vektorértékű függvény szerepel.

- **P** Írjuk fel az $y = x^2$ egyenletű parabola explicit egyenletrendszerét és explicit vektoregyenletét!
- **M** Válasszuk paraméternek a parabola egy pontjának első koordinátáját, azaz legyen $t = x$!
- \- Az explicit egyenletrendszer: $x = t$, $y = t^2$.
- \- Az explicit vektoregyenlet: az előző lépés paraméterválasztása most is megfelel!
- \- $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

Irányvektor, normálvektor

D **Irányvektor**

A sík vagy a tér egy egyenesével párhuzamos tetszőleges nemzérus $\mathbf{v}$ vektort az egyenes *irányvektorának* nevezzük.

D **Normálvektor**

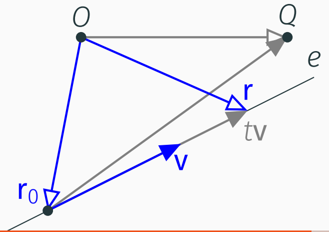
Egy síkbeli egyenesre merőleges, illetve a tér egy síkjára merőleges nemzérus vektort az egyenes, illetve a sík *normálvektorának* nevezzük.

T **Egyenes explicit vektoregyenlete**

A sík vagy a tér minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.



B Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ valamilyen t valós számra, azaz $\mathbf{r}$ előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban.

- Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban.
- Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.

T

Egyenes explicit egyenletrendszere

A sík minden egyenesének van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszere, ahol $(a, b) \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja. Hasonlóképp a tér minden egyenesének van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszere, ahol $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0, z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

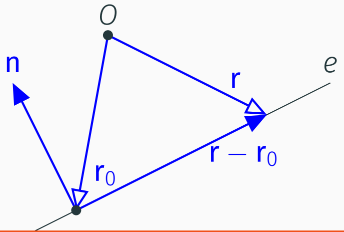
Síkbeli egyenes implicit egyenlet(rendszer)ei

T **Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete**

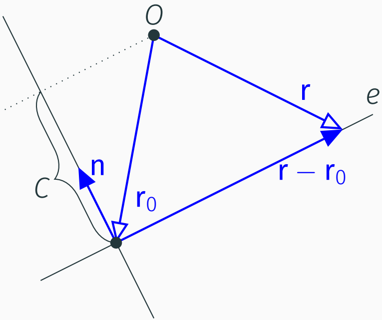
A sík minden egyenesének van $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$,és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.



- Az alábbi ábráról leolvasható, hogy ha az **n** normálvektor *egységvektor*, akkor az C szám geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az **n** egyenesére eső merőleges vetületének C a hossza, azaz C az origónak a síktól való előjeles távolsága. (Az előjel azt mondja meg, hogy az origó a sík melyik oldalán van.)



T **Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete**

A sík minden egyenesének van

$$Ax + By = C \tag{1}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

P **Síkbeli egyenes egyenletei**

Írjuk fel a $(2, 3)$ és az $(1, 1)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenes összes egyenlet(rendszer)ét!

M Számítsuk ki az egyenes irányvektorát és válasszunk ki egy pontot az egyenesen!

- $\mathbf{v} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$, $\mathbf{r}_0 = (1,1)$.
- Az explicit vektoregyenletre vonatkozó képletbe helyettesítve: $\mathbf{r} = (1,1) + t(1,2)$.
- Az explicit egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

- Az irányvektor $(1,2)$, amiből a normálvektor $(A,B) = (-2,1)$. Innen az egyenes implicit vektoregyenlete $(-2,1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, azaz $(-2,1) \cdot (x-1, y-1) = 0$ vagy $(-2,1) \cdot (x,y) = (-2,1) \cdot (1,1)$, amiből az (implicit) egyenlete

$$2x - y = 1.$$

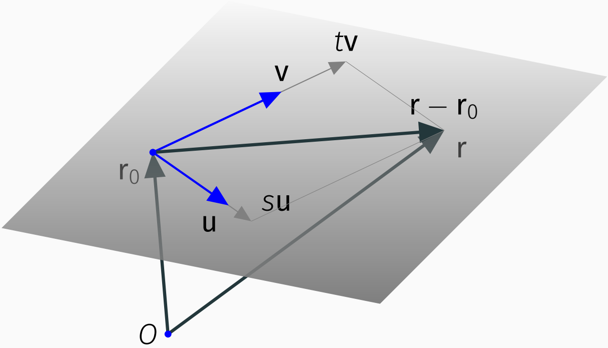
T **Sík explicit egyenletei**

Bármely síknak van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

alakú *explicit vektoregyenlete*, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ és $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ a sík két nem párhuzamos vektora és $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor. A fenti egyenlet ekvivalens alakja a sík *explicit egyenletrendszere*:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y &= y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z &= z_0 + sc_1 + tc_2 \end{aligned}$$



B Az $\mathbf{r}$ helyvektor végpontján át az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokkal párhuzamos egyenesek berajzolásából, hogy megfelelő t és s konstansokkal az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor előáll $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ alakban, így $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. E formula koordinátákra fölírt alakja adja a tétel második képletét.

T

Sík implicit vektoregyenlete

A háromdimenziós térben minden síknak van $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = D$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és D konstans.

B L! $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Mivel $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ és $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, ezért $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \mathbf{n} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \\
&= s\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + t\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

T **Sík implicit egyenlete**

A háromdimenziós térben minden síknak van

$$Ax + By + Cz = D$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

B Az $\mathbf{n} = (A, B, C)$ jelöléssel a sík egyenlete az implicit vektoregyenletből $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

P **Sík egyenletei**

Írjuk fel a $(0,-1,2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{u}=(2,2,2)$ és $\mathbf{v}=(-1,1,5)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenleteit!

M A sík explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$(x,y,z)=(0,-1,2)+s(2,2,2)+t(-1,1,5), \text{ illetve } \begin{aligned} x &= \phantom{-1+{}}2s-t \\ y &= -1+2s+t \\ z &= 2+2s+5t. \end{aligned}$$

- A normálvektor: $(2,2,2)\times(-1,1,5)=(8,-12,4)$.
- $8(x-0)-12(y-(-1))+4(z-2)=0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után
$$2x-3y+z=5.$$
- $(2,-3,1)\cdot(x,y,z)=5$, vagy $(2,-3,1)\cdot(x,y+1,z-2)=0$.

Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere

T

Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere

A tér minden egyenesének van két egyenletből álló implicit egyenletrendszere. Legyen $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ az egyenes egy irányvektora. Az alábbi három egyenlet közül bármelyik két különböző, amelyik nem $0 = 0$ alakú az egyenes egy egyenletrendszerét adja:

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$
$$c(x - x_0) = a(z - z_0)$$
$$c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

B Az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből küszöböljük ki a paramétert.

- Szorozzuk be az első egyenletet b-vel, a másodikat a-val, majd vonjuk ki a második egyenletet az elsőből, kapjuk, hogy $bx - ay = bx_0 - ay_0$. Hasonlóképp adódik $cx - az = cx_0 - az_0$ és $cy - bz = cy_0 - bz_0$. Átrendezzük.

? Mi történik, ha a normálvektor két koordinátája 0?

- Mivel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, így legalább az egyik koordináta nem 0. Ha pl. $a \neq 0$, $b = c = 0$, akkor az egyenletrendszer

$$y = y_0$$
$$z = z_0$$

alakú: ez két nem párhuzamos sík egyenlete. Metszetük egyenes. (A harmadik egyenlet $0 = 0$ alakú, ami elhagyható.)

? Mi történik, ha a normálvektor egy koordinátája 0?

- Ekkor két egyenlet azonos, egyikük elhagyható. Ha például ha $a \neq 0$, $b \neq 0$ de $c = 0$, akkor az egyenletek alakja

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$

$$z = z_0$$

$$z = z_0.$$

? Mit mondhatunk, ha az irányvektor egyik koordinátája sem 0?

- Ekkor három sík egyenletét kapjuk, melyek közül semelyik kettő sem párhuzamos a bennük szereplő változók különbözősége miatt, így bármelyik kettő metszete ugyanaz az egyenes: bármelyik két egyenlet megtartható.

m Ha egyik koordináta sem 0, akkor a fenti egyenletrendszert egy átrendezett alakban adják meg:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

P A $(0, 2, 4)$ ponton átmenő, $(1, 3, 0)$ irányvektorú egyenes

- explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4, \end{aligned}$$

- implicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} y - 2 &= 3x \\ z &= 4. \end{aligned}$$

P Az $(1, 2, 3)$ ponton átmenő, $(4, 5, 6)$ irányvektorú egyenes

- explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 5t \\ z &= 3 + 6t, \end{aligned}$$

- egy implicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} 5(x-1) &= 4(y-2) \\ 6(x-1) &= 4(z-3). \end{aligned}$$

P **Két sík metszésvonala**

Az S_1 sík három pontja $P(1,1,1)$, $Q(2,3,1)$, $R(1,1,2)$, az S_2 sík egyenlete $x+y+z=1$. Írjuk fel a két sík metszésvonalának explicit egyenletrendszerét.

M Írjuk fel az S_1 egyenletét!

- Az S_1 sík két vektora $\overrightarrow{PQ}=(1,2,0)$ és $\overrightarrow{PR}=(0,0,1)$. Ezek vektori szorzata $\mathbf{n}=(1,2,0)\times(0,0,1)=(2,-1,0)$.
- Az S_1 egy pontja P, a P-n átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete $(2,-1,0)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$, azaz $2x-y=1$.

- Írjuk fel a metszet explicit egyenletrendszerét a két sík egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásával!
- Az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y \quad\; &= 1. \end{aligned}$$

Az összes megoldás megtalálásához válasszuk az egyik változót paraméternek. Pl. legyen $x = t$. A második egyenletből $y = 2t - 1$. Az első egyenletbe való helyettesítés után $z = 2 - 3t$. Összefoglalva:

$$\begin{aligned} x &= \quad\;\; t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= \;\; 2 - 3t \end{aligned}$$